ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК

С.В.Шмелева
(ВИНИТИ)

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется конгруэнция линейчатых невырожденных квадрик. Из конгруэнций $\mathcal{K}_2''$ [1] выделен и геометрически охарактеризован подкласс таких конгруэнций. Найдена геометрическая характеристика всех инвариантов канонического репера.

§1. Конгруэнции $\mathcal{H}$. Теорема существования

Отнесем конгруэнцию K линейчатых невырожденных квадрик к реперу $R=\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0 и A_3 – фокальные точки квадрики $Q \in K$, а A_0A_i, A_3A_i – ее прямолинейные образующие. Конгруэнция K определяется системой уравнений (2), (3) работы [2]. Здесь и в дальнейшем $i, j, k = 1, 2$; $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. Для линии $\omega^i = t^i \vartheta$ на поверхности (A_0) однозначно определяется присоединенная квадрика Q_t:

$$t^1 F_1 + t^2 F_2 = 0, \qquad (1.1)$$

где

$$F_i \equiv h_i x^1 x^2 - a^j_{ii} (x^i)^2 - a^i_{ji} (x^j)^2 + \lambda_{ki} x^k x^3 + c_{ki} x^k x^0 \qquad (1.2)$$

Она выделяется из пучка квадрик, содержащих характеристику $F=0$, $d_t F = 0$ квадрики Q вдоль (1.1) условием полярной сопряженности фокальных точек A_0 и A_3.

Определение 1.1. Линией Γ_i на поверхности (A_0) называется линия, огибаемая прямолинейными образующими A_0A_i; линией c_i (соответственно λ_i) называется линия, вдоль которой точки A_i и A_0 (соответственно A_i и A_3) полярно сопряжены относительно своей присоединенной квадрики.

Линии Γ_i, c_i, λ_i определяются соответственно уравнениями

$$\omega^j = 0, \quad c_{ii}\omega^i + c_{ij}\omega^j = 0, \quad \lambda_{ii}\omega^i + \lambda_{ij}\omega^j = 0. \qquad (1.3)$$

Определение I.2. Конгруэнцией $\mathcal{H}$ называется конгруэнция K, обладающая следующими свойствами:

1) Линии c_i, λ_i, Γ_i на поверхности (A_0), не являющейся плоскостью, совпадают;
2) Поверхности (A_1) и (A_2) не являются фокальными.

Из определения 1.2. следует, что конгруэнция $\mathcal{H}$ характеризуется соотношениями

$$c_{ii} = 0, \ \lambda_{ii} = 0, \ a^j_{ii} = 0, \ a^j_{ij} = 1, \ h_i = -1, \ b^1_1 = b^2_2, \ \lambda_{12} = \lambda_{21}, \qquad (1.4)$$

причем

$$(1 + c_{12})(\lambda_{12} - b^1_1 c_{12})\lambda_{12} \neq 0. \qquad (1.5)$$

Теорема 1.1. Конгруэнции $\mathcal{H}$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Доказательство. Обозначим

$$\tilde{c} = c_{12}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda_{12}, \quad b = b^1_1 \qquad (1.6)$$

В силу (1.4), (1.5) замкнутая система уравнений конгруэнции приводится к виду.

$$\begin{aligned}
&\omega^3_0 = 0, \ \omega^0_3 = 0, \ \omega^j_i = \omega^j, \ \omega^3_i = (1+\tilde{c})\,\omega^j, \\
&\omega^0_i - \omega^j_3 = \tilde{\lambda}\,\omega^j, \ \omega^i_3 = b\,\omega^i + b^i_j\,\omega^j, \ \Omega + \omega^1 + \omega^2 = 0, \qquad (1.7)\\
&d\ln(1+\tilde{c}) - \Omega = 0, \ \omega^i_i - \omega^0_0 = \omega^i + m\,\omega^j + \tilde{c}\,\omega^j_3, \\
&d\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\omega^1_1 + \omega^2_2 - 2\omega^0_0 - 2\omega^1 - 2\omega^2) - \omega^1_3 - \omega^2_3, \\
&dm = (\tilde{c}m - 2\tilde{c} - 1)(\omega^1_3 + \omega^2_3) + (m^2 - 2m - \tilde{\lambda})(\omega^1 + \omega^2).
\end{aligned}$$

$$\Delta b \wedge \omega^i + \Delta b^i_j \wedge \omega^j = 0, \qquad (1.8)$$

где

$$\left\{\begin{aligned}
&\Omega = \omega^0_0 - \omega^1_1 - \omega^2_2 + \omega^3_3, \quad \Delta b = db + b(\omega^0_0 - \omega^3_3), \\
&\Delta b^i_j = db^i_j + 2b^i_j(\omega^0_0 - \omega^j_j + \omega^i).
\end{aligned}\right. \qquad (1.9)$$

Из (1.7),(1.8) непосредственно следует утверждение теоремы.

§2. Геометрические свойства конгруэнций $\mathcal{H}$

Т е о р е м а 2.1. Фокальное многообразие квадрики $Q \in \mathcal{H}$ состоит из коники $\widetilde{C}$ и точек A_0 и A_3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.7) следует, что система уравнений для определения фокальных точек квадрики имеет вид:

$$\begin{cases} x^1x^2 - x^0x^3 = 0, \\ x^2\left((\widetilde{c}-1)x^0 - x^1 - x^2 + \widetilde{\lambda}x^3\right) = 0, \\ x^1\left((\widetilde{c}-1)x^0 - x^1 - x^2 + \widetilde{\lambda}x^3\right) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

откуда следует, что фокальное многообразие квадрики Q состоит из точек A_0, A_3 и коники $\widetilde{C}$, являющейся сечением квадрики

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0 \tag{2.2}$$

плоскостью $\widetilde{\pi}$:

$$(\widetilde{c}-1)x^0 - x^1 - x^2 + \widetilde{\lambda}x^3 = 0. \tag{2.3}$$

Т е о р е м а 2.2. Прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) ассоциированная с конгруэнцией $\mathcal{H}$, гармонична фокальной поверхности (A_0), а прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) сопряжена ей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3) определяются одним и тем же уравнением:

$$b_1^2(\omega^1)^2 - b_2^1(\omega^2)^2 = 0. \tag{2.4}$$

Так как асимптотические линии на поверхности (A_0) - координатные, то (2.4) задает на ней сопряженную сеть.

Т е о р е м а 2.3. Фокусы луча A_1A_2 непараболической конгруэнции (A_1A_2) гармонически делят точки A_1 и A_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокусы луча A_1A_2 определяются формулами

$$\mathcal{F}_i = \sqrt{b_j^i}\,A_i + (-1)^{i+1}\sqrt{b_i^j}\,A_j. \tag{2.5}$$

Так как $b_2^1 b_1^2 \neq 0$, то $(A_1A_2; \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2) = -1$.

Т е о р е м а 2.4. Пусть Q_0 - квадрика Ли поверхности (A_0) в точке A_0. Квадрики Q и Q_0 имеют общие прямолинейные образующие A_0A_i и конику.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадрики Q и Q_0 определяются соответственно уравнениями

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0, \tag{2.6}$$

$$(\widetilde{\lambda}+m)(x^3)^2 + 2(1+\widetilde{c})\left((1+\widetilde{c})x^1x^2 - x^0x^3 - x^1x^3 - x^2x^3\right) = 0, \tag{2.7}$$

откуда следует, что $A_0A_i \subset Q \cap Q_0$ и коника C

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0,\ (\widetilde{\lambda}+m)x^3 + 2(1+\widetilde{c})(\widetilde{c}x^0 - x^1 - x^2) = 0 \tag{2.8}$$

принадлежат обеим квадрикам.

Т е о р е м а 2.5. Фокальная поверхность (A_0) конгруэнции $\mathcal{H}$ является линейчатой квадрикой.

Действительно, из (2.7) следует, что Q - инвариантная квадрика. Следовательно, $(A_0) \equiv Q_0$.

§3. Геометрическая характеристика инвариантов

Деривационные формулы канонического репера конгруэнции $\mathcal{H}$ содержат шесть инвариантов:

$$\widetilde{c},\ \widetilde{\lambda},\ b,\ m,\ b_1^2,\ b_2^1. \tag{3.1}$$

Найдем их геометрическую характеристику через сложные отношения четверок геометрически определенных точек на прямых.

Пусть P - четвертая гармоническая к A_0 относительно фокусов P_1, P_2 луча A_0A_3 прямолинейной конгруэнции (A_0A_3); π - плоскость коники $C \subset Q_0 \cap Q$, π^*, π_i - поляры точек A_3 и A_i относительно квадрики $Q_0 \equiv (A_0)$; $\ell(\ell^*)$ - линия пересечения плоскости π (π^*) с плоскостью $(A_0A_1A_2)$; S_i - точка пересечения с A_1A_2 касательной к линии $\omega^j = 0$ на поверхности (A_3); $N_i = \ell \cap A_0A_i$, $E_0^* = \ell \cap A_1A_2$, $E_i^* = \ell^* \cap A_0A_i$, $\widetilde{E}_i^*$ - точка пересечения прямой A_iA_3 с полярой точки E_j^* относительно квадрики Q; $E_0, E_i, \widetilde{E}_i$ - четвертые гармонические соответственно точкам $E_0^*, E_i^*, \widetilde{E}_i^*$ относительно прямых A_1A_2, A_0A_i, A_iA_3; E - точка пересечения плоскостей $(E_0A_0A_3)$, $(\widetilde{E}_1A_0A_2)$, $(E_1A_2A_3)$; $E_3 \equiv A_0A_3 \cap (A_1A_2E)$, $R \equiv A_0A_3 \cap \pi^*$; E_3^* - четвертая гармоническая точке E_3 относительно точек A_0 и A_3; $\mathcal{F}_i$ - фокусы луча $A_1A_2 \in (A_1A_2)$; T_i - точка пересечения с прямой A_0A_i, касательной плоскости $K(E_3)$ в точке E_3.

Тогда

$$\tilde{c} = (E_1N_1 ; A_0A_1) = (E_2N_2 ; A_0A_2),$$

$$b = (PE_3 ; A_3A_0) = -(PE_3^* ; A_3A_0),$$

$$b_i^j = (PE_3 ; A_3A_0)(S_iE_0^* ; A_1A_2) = (PE_3^* ; A_3A_0)(S_iE_0 ; A_1A_2),$$

$$b_i^j = b_j^i\,(\mathcal{F}_iE_0 ; A_1A_2)^2,$$

$$m = (b-1)\,(A_0A_1 ; E_1T_1) - \tilde{c}\,(b + b_1^2) =$$

$$= (b-1)\,(A_0A_2 ; E_2T_2) - \tilde{c}\,(b + b_2^1),$$

$$\lambda = -m + (RE_3 ; A_3A_0)\,(1 + (E_1N_1 ; A_0A_1)) =$$

$$= -m + (RE_3 ; A_3A_0)\,(1 + (E_2N_2 ; A_0A_2)).$$

Библиографический список

1. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1981.Вып.12.С.44-47.

2. Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции квадрик с вырождающейся поверхностью,порожденной фокальными точками второго порядка// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./ Калинингр.ун-т.Калининград,1985.Вып.16.С.113-116.

3. Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с четырехкратной фокальной поверхностью// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград,1986.Вып.17.С.106-109.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

О КОНГРУЭНЦИЯХ ПАР ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ КОНИК

Е.А.Щ е р б а к
(Калининградский университет)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются конгруэнции пар коник F_1, F_2 с совпадающими центрами. Отнесем конгруэнцию к подвижному реперу $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$ ($\alpha = 1,2,3$), начало A которого совмещено с центром коники F_1, векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ сопряжены относительно коники F_1, а векторы $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ – относительно коники F_2, концы E_α векторов $\bar{e}_\alpha$ расположены на соответствующих кониках. Обозначим через $\bar{E}'_\alpha = \bar{A} - \bar{e}_\alpha$.

Уравнения коник F_1 и F_2 относительно выбранного репера R имеют соответственно вид:

$$\begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \\ x^3 = 0, \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \\ x^1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Будем называть конгруэнцией T указанную конгруэнцию коник F_1, F_2 при условии, что коники F_1 конгруэнции (F_1) принадлежат инвариантной квадрике Q, центр которой совпадает с центром A коник, и прямая (AE_3) сопряжена плоскости $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$ относительно квадрики Q.

Уравнение квадрики Q имеет вид:

$$Q \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + a(x^3)^2 - 1 = 0, \quad a \neq 0 \qquad (3)$$

В силу инвариантности квадрики Q имеем

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_2^1 = -\omega_1^2,$$
$$\omega_3^1 = -a\omega_1^3, \quad \omega_3^2 = -a\,\omega_2^3, \quad da = 2a\,\omega_3^3 \qquad (4)$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции T состоит из уравнений (4) и следующих уравнений:

$$\omega_1^2 = \Gamma_{1i}^2\,\Omega^i, \quad \omega_3^3 = \Gamma_{3i}^3\,\Omega^i, \qquad (5)$$